Aproximación simbólica al descubrimiento automático de lugares geométricos en el plano

Francisco Botana y José L. Valcarce

Resumen

La aproximación usual a la generación de lugares geométricos en el plano tomada en los programas de geometría dinámica es numérica. El arrastre de algún elemento en un diagrama y la traza de otro elemento dependiente del primero produce un lugar virtual. Una aproximación basada en métodos simbólicos, bien contrastados dentro del campo de la demostración automática, permite el descubrimiento de lugares geométricos en términos de sus ecuaciones y representaciones gráficas. Se describe un programa, Lugares, que une un entorno de geometría dinámica con un sistema de cálculo simbólico para el descubrimiento automático de lugares en el plano.

Palabras clave. Demostración automática. Descubrimiento automático. Entornos inteligentes de enseñanza.

Introducción

Desde Leibniz el sueño de deducir mecánicamente todos los teoremas de una teoría a partir de un pequeño conjunto de axiomas fascinó durante varios siglos a los científicos, en particular matemáticos. La geometría de Euclides cimentó el pensamiento occidental desde los griegos hasta el siglo XIX, sirviendo como modelo para la aplicación de la lógica a nuevos conjuntos de hipótesis. El descubrimiento de que el quinto postulado no puede derivarse de los restantes y, por tanto, puede ser sustituido generando otras geometrías provocó en su momento una auténtica conmoción. Pese a ello, y particularmente en la comunidad matemática, el deseo de una máquina lógica universal persistió durante décadas. Recuérdese que éste fue uno de los problemas propuestos por Hilbert. Como es sabido, transcurrido un tercio del siglo pasado Gödel demostró que una máquina tal no es posible. Rebajando la ambición, el nuevo objetivo planteado fue una máquina que demostrase, ya que no todos, *algunos* teoremas.

La conjunción de este afán con la aparición de las computadoras electrónicas hizo que la *prueba automática de teoremas* se convirtiese en un aspecto clave de la Inteligencia Artificial. Una comunicación de Newell, Shaw y Simon (1956) presentando un programa capaz de probar algunos teoremas del *Principia Mathematica* es el referente histórico inicial de esta actividad. Regresando a la geometría, sin duda hay que citar la *máquina geométrica* de Gerlenter, Hansen y Loveland (1963) capaz de probar teoremas en geometría euclídea. Las aproximaciones puramente lógicas o axiomáticas a la demostración automática en geometría fueron claramente superadas en los ochenta con la utilización de métodos constructivos. El método de las bases de Groebner (Buchberger, 1985) y el método de Wu (1978) permiten probar, en cuestión de segundos, teoremas no triviales en geometría euclídea plana con los que un experto humano tendría dificultad. Se han construido eficientes sistemas de demostración automática en geometría utilizando el método de Wu (Wu, 1986; Chou, 1988). Por otro lado, los trabajos de Buchberger han inspirado otras contribuciones fundamentales (Kapur, 1988; Recio, 1999). El método de Wu ha sido utilizado en (Roanes, 1999) para la obtención semiautomática de lugares geométricos.

Esta comunicación describe los aspectos esenciales de un sistema de descubrimiento automático de lugares geométricos en el plano. Utiliza el método de las bases de Groebner, enfatizando su uso para el descubrimiento, más que para la demostración. En la Sección 2 se ilustra, con un ejemplo sencillo, el método de descubrimiento automático. La Sección 3 describe otras aproximaciones a la generación de lugares geométricos y la que conforma el programa, y la Sección 4 lista algunos descubrimientos y, por lo que sabemos, redescubrimientos de teoremas geométricos.

Un ejemplo ilustrador

Dadas dos rectas paralelas y distintas, calcular el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ellas.

Esta elemental cuestión servirá para ilustrar las tareas a realizar, que grosso modo son: representación en términos de un diagrama o figura, traducción algebraica de la información geométrica y aplicación del método de la base de Groebner.

En primer lugar construimos, en posiciones arbitrarias y distintas, tres puntos no alineados A, B y C, la recta AB y la paralela a ésta que pasa por C. Construimos también un punto arbitrario X y la recta perpendicular a, por ejemplo AB, que pasa por X. Esta recta determina con las dos primeras dos puntos distintos M y N (Figura 1).

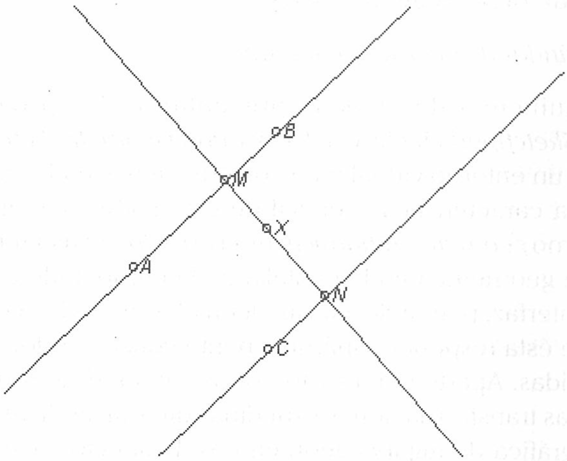


Figura 1. El diagrama construido para el ejemplo.

La información contenida en el diagrama puede ser descrita en términos de sus puntos y las relaciones geométricas entre sus elementos. Asignando coordenadas a cada uno de los puntos, con el convenio de que un punto libremente construido es de la forma (u_i,u_{i+1}) y uno dependiente es (x_j,x_{j+1}), en nuestro caso tal información es $A(u_1,u_2)$, $B(u_3,u_4)$, $C(u_5,u_6)$, $X(u_7,u_8)$, $M(x_1,x_2)$, $N(x_3,x_4)$, *Alineados*(M,A,B), *Perpendicular*(AB,MX), *Perpendicular*(AB,NX) y *Paralelas*(AB,NC). La traducción cartesiana de las cuatro propiedades es el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
&(u_2 - x_2)*(u_3 - u_1)-(u_4 - u_2)*(u_1 - x_1)=0,\\
&(u_4 - u_2)*(x_2 - u_8)+(u_3 - u_1)*(x_1 - u_7)=0,\\
&(u_4 - u_2)*(x_4 - u_8)+(u_3 - u_1)*(x_3 - u_7)=0,\\
&(u_4 - u_2)*(u_5 - x_3)-(u_6 - x_4)*(u_3 - u_1)=0.
\end{aligned} \qquad (1)$$

Si además imponemos a X la condición del lugar geométrico, es decir, PuntoMedio(X,M,N), cuyas ecuaciones son

$$\begin{aligned}
&u_7-(x_1 + x_3)/2=0,\\
&u_8-(x_2 + x_4)/2=0,
\end{aligned} \qquad (2)$$

el sistema formado por las seis ecuaciones puede interpretarse como un conjunto de restricciones a las variables que lo forman. Puesto que el objetivo es encontrar el lugar de los puntos X, la eliminación de las variables x, cuando resulte posible, devolverá una ecuación que será, en u_7 y u_8, la del lugar buscado:

$$u_2 u_3- u_1 u_4+ u_2 u_5- u_4 u_5- u_1 u_6+ u_3 u_6-2 u_2 u_7+2 u_4 u_7+2 u_1 u_8-2 u_3 u_8=0 \qquad (3)$$

Generación de lugares geométricos

Entornos estándar de geometría dinámica

Hace una quincena de años se presentaron dos programas *The Geometer's Sketchpad* (Jackiw, 1997) y *Cabri Géomètre* (Laborde, 1998) que ofrecían un entorno virtual para construcciones realizadas con regla y compás. La característica esencial de este software, genéricamente conocido como *geometría dinámica*, es el *arrastre*: el usuario realiza una construcción geométrica en la pantalla de la computadora y, mediante un sencillo interfaz, puede desplazar algún elemento de la construcción mientras que ésta responde dinámicamente conservando las restricciones introducidas. Aparte del arrastre, otras características de estos programas son las transformaciones y medidas dinámicas, la animación y la generación gráfica de lugares geométricos. Respecto a esta última hay que señalar la aproximación numérica empleada: para generar, por ejemplo, una astroide, basta con apoyar un segmento de longitud fija en los ejes coordenados y pedir su traza a la vez que el segmento se mueve: las sucesivas posiciones del segmento muestran en la pantalla la curva buscada. A pesar de su carácter semidinámico en el sentido de que responden al arrastre de los objetos de los que dependen, el problema de la continuidad (¿cómo discriminar los puntos de corte recta-circunferencia al recorrer caminos?) provoca que los lugares obtenidos sean incompletos o aberrantes. Una solución parcial a la generación completa, si bien con la misma aproximación numérica, es la implementada en *Cinderella* (Kortenkamp, 1999; Richter-Gebert, 1999), usando coordenadas homogéneas y números complejos.

El programa Lugares

Lugares es un entorno estándar de geometría dinámica que incorpora además un método simbólico para el descubrimiento automático de la ecuación de lugares geométricos y su representación.

Como entorno estándar Lugares utiliza REX (Valcarce, 1999), un programa de geometría dinámica escrito en Prolog para servir de interfaz gráfica a la implementación de métodos de prueba automática en geometría elemental. Para el descubrimiento automático de un lugar, el programa deduce del diagrama construido por el usuario la información geométrica relevante, que es traducida a términos algebraicos y transmitida a un sistema de álgebra computacional, CoCoA (Capani, 2001) o Mathematica. La eficiente implementación del algoritmo de Buchberger en CoCoA se encarga de la eliminación de las variables de puntos dependientes, devolviendo, tras varios procesos de simplificación y factorización, la ecuación del lugar geométrico. Dada la complejidad del método de la base de Groebner (en el peor caso doblemente exponencial), Lugares ofrece la asignación de dos puntos libres como origen y unidad, eliminando así cuatro variables. Otra estrategia opcional consiste en definir un sistema de referencia, con lo que todas las coordenadas de puntos libres, salvo las del punto del lugar, son sustituidas por sus valores numéricos. La ecuación del lugar así obtenida tiene entonces como únicas variables las del punto del lugar, permitiendo con ello su representación gráfica.

Algunos (re)descubrimientos

En (Guzmán, 1999) se describe la siguiente generalización de los teoremas de Simson y Steiner:

Dados un triángulo ABC, un punto arbitrario X del plano, y tres direcciones fijas, no todas iguales ni paralelas a los lados del triángulo, sean M, N y P las proyecciones según dichas direcciones a los lados del triángulo. El lugar geométrico de los puntos X para los que el área orientada del triángulo MNP es k es una cónica.

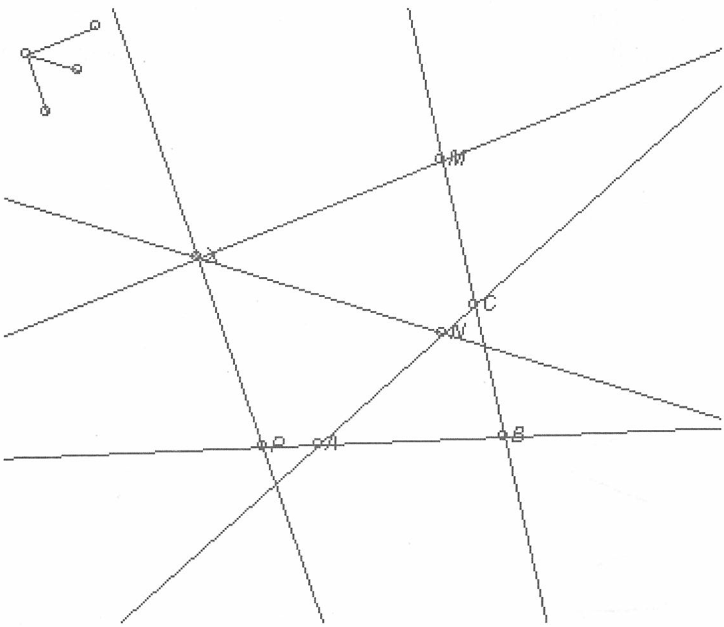


Figura 2. La construcción para el teorema de Guzmán.

Imponiendo que el área del triángulo *MNP* sea 1, Lugares establece el cuadro de diálogo de la Figura 3 y encuentra que el lugar tiene una ecuación ¡de 154 términos!, que identifica como una cónica.

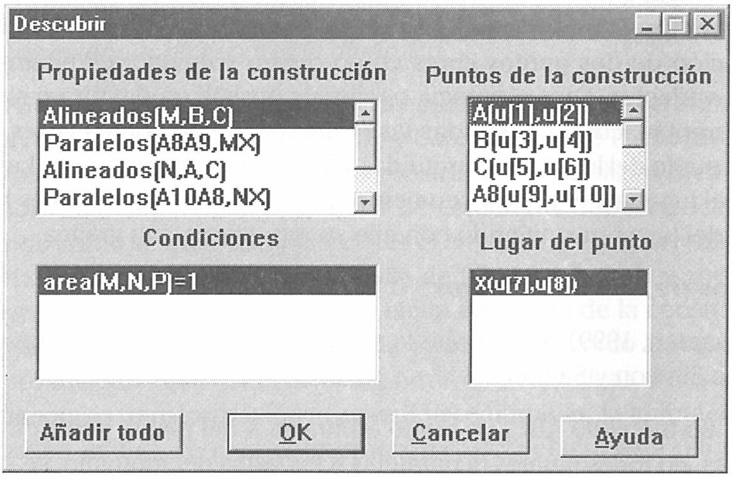
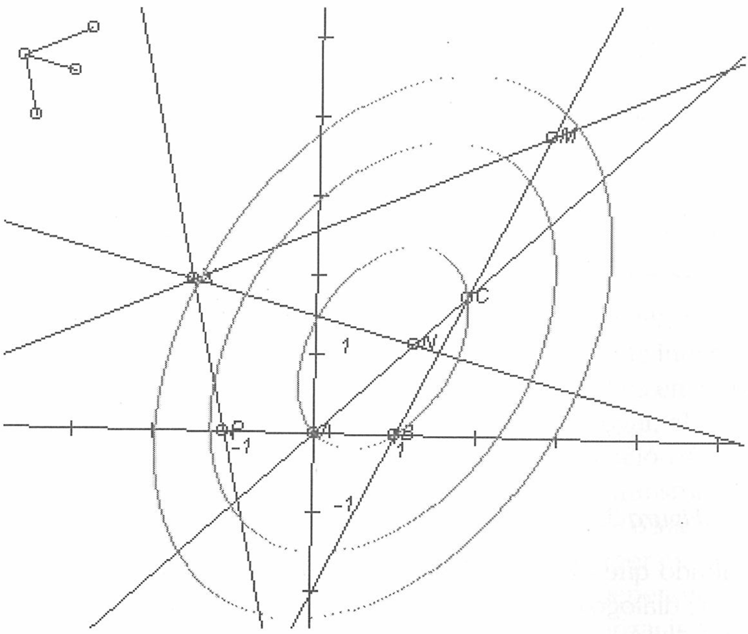


Figura 3. Cuadro de diálogo para el teorema de Guzmán.

Si se define como sistema de referencia (A, B), los cálculos se simplifican notablemente. La Figura 4 muestra el lugar geométrico buscado para áreas 0, 1 y 2, donde las ecuaciones, no mostradas, tienen respectivamente 6, 6 y 5 términos.



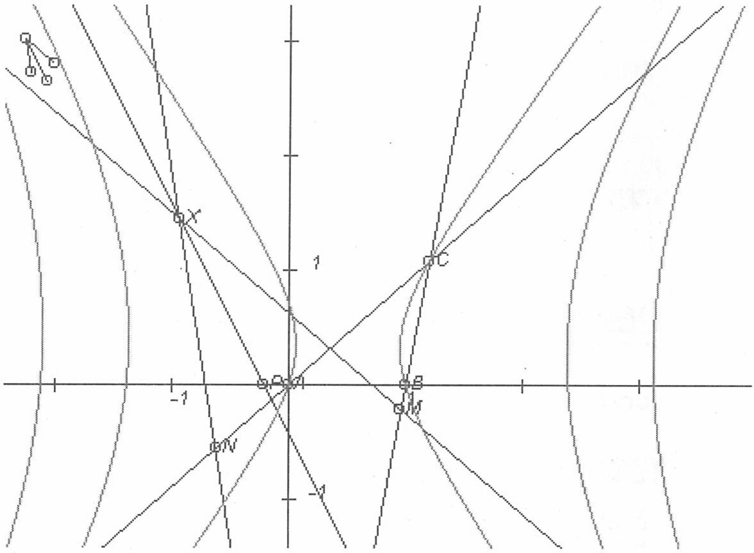
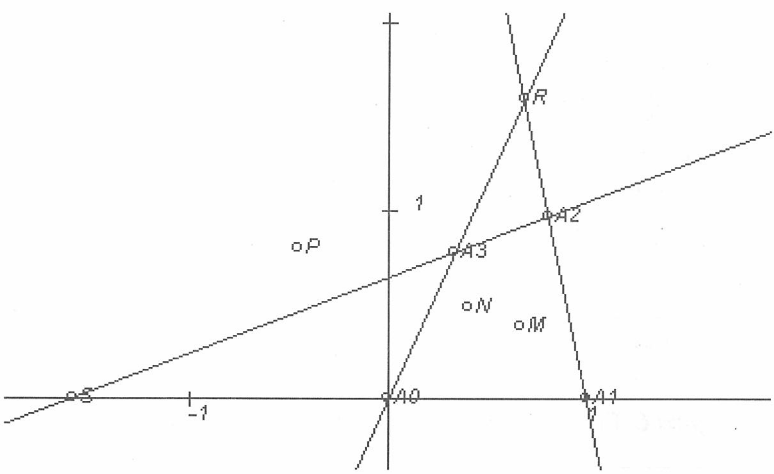


Figura 4. Elipses e hipérbolas homotéticas en el teorema de Guzmán.

Con el riesgo de redescubrir un resultado conocido, mencionaremos como segundo ejemplo un teorema derivado del de la recta de Gauss.

Teorema de la recta de Gauss. *Dados A_0, A_1, A_2 y A_3 cuatro puntos del plano, R la intersección de A_0A_3 y A_1A_2 y S la intersección de A_0A_1 y A_2A_3. Sean M, N y P los puntos medios de A_1A_3, A_0A_2 y RS, respectivamente. Los puntos M, N y P están alineados.*

Imponiendo que *P* sea el punto medio de *M* y *N* y preguntando cuál es el lugar geométrico de uno de los vértices del cuadrilátero (A_3) (Figura 5), Lugares descubre que es una hipérbola (Figura 6).



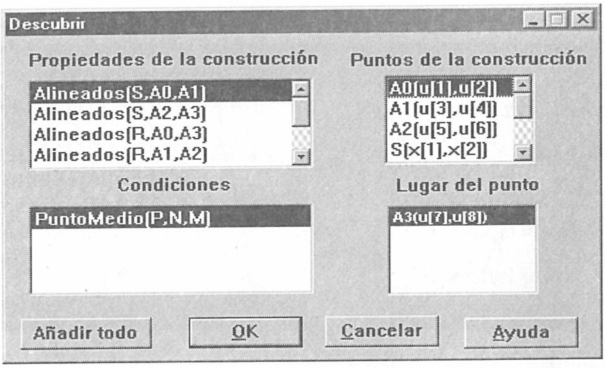
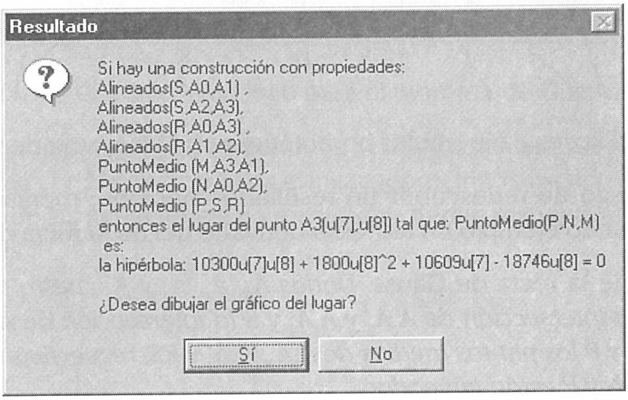


Figura 5. La construcción y el cuadro de diálogo para el descubrimiento.



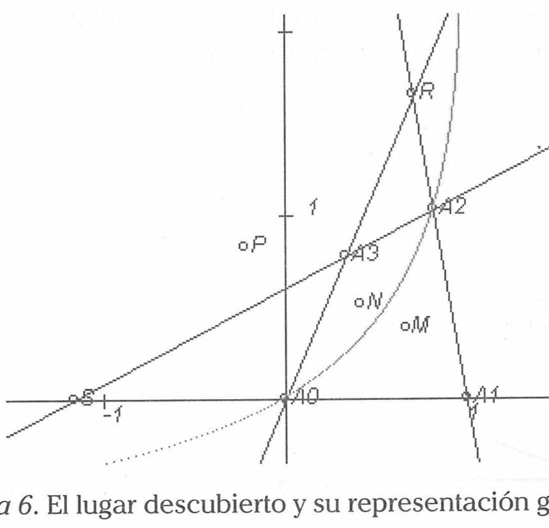


Figura 6. El lugar descubierto y su representación gráfica.

Conclusión

Se describe un programa que une un entorno de geometría dinámica clásico con un sistema de álgebra computacional para el descubrimiento automático de lugares geométricos en el plano. La aproximación simbólica utilizada permite la obtención de las ecuaciones de los lugares, obviando así la mera representación gráfica, no siempre completa, de los programas estándar de geometría dinámica. Por otra parte, el programa ofrece una solución, parcial aunque novedosa en un dominio limitado, al descubrimiento automático en geometría.

Recursos

Puede descargarse una demo de Lugares en http://rosalia.uvigo.es/sdge/lugares

Bibliografía

Buchberger, B.(1985): "Groebner Bases: An Algorithmic Method in Polynomial Ideal Theory", en N.K. Bose (ed.), *Multidimensional Systems Theory*, D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht.

Capani, A.; G.L. Niesi; L. Robbiano: *CoCoA, a system for doing Computations in Commutative Algebra*. Ftp anónimo: cocoa. dima. unige.it

Chou, S.C.(1988): *Mechanical Geometry Theorem Proving*, D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht.

Gerlenter, H.; J.R. Hansen; D.W. Loveland (1963): "Empirical Exploration of the Geometry Theorem Proving Machine", en A. Feigenbaum y J. Feldman (eds.), *Computer and Thought*, McGraw-Hill, Nueva York

Guzmán, M.(1999): "An extension of the Wallace-Simson theorem: projecting in arbitrary directions", *American Math. Monthly*, 106.

Jackiw, N.(1997): *The Geometer's Sketchpad*, Key Curriculum Press, Berkeley.

Kapur, D.(1988): "A refutational approach to geometry theorem proving", *Artificial Intelligence*, 37.

Kortenkamp, U.(1999): *Foundations of dynamic geometry*. Tesis Doctoral, ETZH, Zurich.

Laborde, J. M.; F. Bellemain (1998): *Cabri Geometry II*, Texas Instruments, Dallas.

Newell, A.; J.C. Shaw; H.A. Simon (1956): "Empirical Explorations of the Logic Theory Machine: A Case Study in Heuristics", en *Proc. of Western Joint Computer Conf.*

Recio, T.; Vélez, M.P. (1999): "Automatic discovery of theorems in elementary geometry", *Journal of Automated Reasoning*, 23.

Richter-Gebert, J.; U. Kortenkamp (1999): *The Interactive Geometry Software Cinderella*. Springer, Berlin.

Roanes Macías, E.; E. Roanes Lozano (1999): "Búsqueda automática de lugares geométricos", *Boletín de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas-Congreso IMACS-ACA'99*, 53.

Valcarce, J.L.; F. Botana (1999): "REX: un recurso para el estudio de la geometría", *Actas de las IX Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, Lugo.

Wu, W.T. (1978): "On the Decision Problem and the Mechanization of Theorem Proving in Elementary Geometry", *Scientia Sinica*, 21.

Wu, W.T. (1986): "Basic Principles of Mechanical Theorem Proving in Geometries", *Journal of Automated Reasoning*, 2.

Francisco Botana, Depto. de Matemática Aplicada. EUETF. Universidad de Vigo en Pontevedra. Campus A Xunqueira. 36005 Pontevedra, España.
Correo electrónico: fbotana@uvigo.es

José L. Valcarce, IES Pontepedriña. 15704 Santiago, España.
Correo electrónico: jvalcarce@edu.xunta.es